

MỤC LỤC

MỤC LỤC	1
PHẦN I: ĐẠI SỐ	2
Chuyên đề 1: Căn thức □ Biến đổi căn thức.....	2
Dạng 1: Tìm điều kiện để biểu thức có chứa căn thức có nghĩa	2
Dạng 2: Biến đổi đơn giản căn thức	2
Dạng 3: Bài toán tổng hợp kiến thức và kỹ năng tính toán.....	3
Chuyên đề 2: Phương trình bậc hai và định lí Viết.	5
Dạng 1: Giải phương trình bậc hai	5
Dạng 2: Chứng minh phương trình có nghiệm, vô nghiệm	5
Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức đối xứng, lập phương trình bậc hai nhờ nghiệm của phương trình bậc hai cho trước	6
Dạng 4: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, có nghiệm kép, vô nghiệm	7
Dạng 5: Xác định tham số để các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thoả mãn điều kiện cho trước.....	8
Dạng 6: So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số.....	8
Dạng 7: Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình bậc hai không phụ thuộc tham số.....	9
Dạng 8: Mối quan hệ giữa các nghiệm của hai phương trình bậc hai	9
Chuyên đề 3: Hệ phương trình.	11
HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN:	11
Dạng 1: Giải hệ phương trình cơ bản và đưa được về dạng cơ bản	11
Dạng 2: Giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ	11
Dạng 3: Xác định giá trị của tham số để hệ có nghiệm thoả mãn điều kiện cho trước	11
MỘT SỐ HỆ BẬC HAI ĐƠN GIẢN:.....	12
Dạng 1: Hệ đối xứng loại I.....	12
Dạng 2: Hệ đối xứng loại II	13
Dạng 3: Hệ bậc hai giải bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số	13
Chuyên đề 4: Hàm số và đồ thị.....	14
Dạng 1: Vẽ đồ thị hàm số.....	14
Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng.....	14
Dạng 3: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và parabol	15
Chuyên đề 5: Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.	15
Dạng 1: Chuyển động (trên đường bộ, trên đường sông có tính đến dòng nước chảy).....	15
Dạng 2: Toán làm chung □ làn riêng (toán vòi nước)	16
Dạng 3: Toán liên quan đến tỉ lệ phân trăm	16
Dạng 4: Toán có nội dung hình học	16
Dạng 5: Toán về tìm số	16
Chuyên đề 6: Phương trình quy về phương trình bậc hai.....	17
Dạng 1: Phương trình có ẩn số ở mẫu.....	17
Dạng 2: Phương trình chứa căn thức	17
Dạng 3: Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối	17
Dạng 4: Phương trình trùng phương	17
Dạng 5: Phương trình bậc cao	17
PHẦN II: HÌNH HỌC	20
Chuyên đề 1: Nhận biết hình, tìm điều kiện của một hình.	20
Chuyên đề 2: Chứng minh tứ giác nội tiếp, chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn. .20	20
Chuyên đề 3: Chứng minh các điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy.22	22
Chuyên đề 4: Chứng minh điểm cố định.....23	23
Chuyên đề 5: Chứng minh hai tam giác đồng dạng và chứng minh đẳng thức hình học.....24	24
Chuyên đề 6: Các bài toán về tính số đo góc và số đo diện tích.....25	25
Chuyên đề 7: Toán quỹ tích.26	26
Chuyên đề 8: Một số bài toán mở đầu về hình học không gian.26	26

PHẦN I: ĐẠI SỐ

Chuyên đề 1: Căn thức – Biến đổi căn thức.

Dạng 1: Tìm điều kiện để biểu thức có chứa căn thức có nghĩa.

Bài 1: Tìm x để các biểu thức sau có nghĩa. (Tìm ĐKXĐ của các biểu thức sau).

1) $\sqrt{3x - 1}$

8) $\sqrt{x^2 + 3}$

2) $\sqrt{5 - 2x}$

9) $\sqrt{x^2 - 2}$

3) $\frac{1}{\sqrt{7x - 14}}$

10) $\sqrt{x^2 - 3x + 7}$

4) $\sqrt{2x - 1}$

11) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$

5) $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{7x+2}}$

12) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

6) $\sqrt{\frac{x+3}{7-x}}$

13) $\frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{3x}{\sqrt{5-x}}$

7) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

14) $\sqrt{6x-1} + \sqrt{x+3}$

Dạng 2: Biến đổi đơn giản căn thức.

Bài 1: Đưa một thừa số vào trong dấu căn.

a) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}$; b) $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ (với $x > 0$); c) $x\sqrt{\frac{2}{5}}$; d) $(x-5)\sqrt{\frac{x}{25-x^2}}$; e) $x\sqrt{\frac{7}{x^2}}$

Bài 2: Thực hiện phép tính.

a) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{14} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + 7\sqrt{8};$	d) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}};$
b) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} - 3\sqrt{0,4});$	e) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$
c) $(15\sqrt{50} + 5\sqrt{200} - 3\sqrt{450}) : \sqrt{10};$	f) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$
g) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}};$	h) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$

Bài 3: Thực hiện phép tính.

a) $(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$

Bài 4: Thực hiện phép tính.

a) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$	b) $(3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}} + (3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}$
c) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{2}$	d) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{7}$
e) $\sqrt{6,5+\sqrt{12}} + \sqrt{6,5-\sqrt{12}} + 2\sqrt{6}$	

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}+1}$

c) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}} + \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}-1}+1}$

d) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$

Bài 6: Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

b) $\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$

c) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

Bài 7: Rút gọn biểu thức sau:

a) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, với $a > 0, b > 0$ và $a \neq b$.

b) $\left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.

c) $\frac{a\sqrt{a}-8+2a-4\sqrt{a}}{a-4};$

d) $\frac{1}{2a-1} \cdot \sqrt{5a^4(1-4a+4a^2)}$

e) $\frac{2}{x^2-y^2} \cdot \sqrt{\frac{3x^2+6xy+3y^2}{4}}$

Bài 8: Tính giá trị của biểu thức

a) $A = x^2 - 3x\sqrt{y} + 2y$, khi $x = \frac{1}{\sqrt{5}-2}; y = \frac{1}{9+4\sqrt{5}}$

b) $B = x^3 + 12x - 8$ với $x = \sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)} - \sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$;

c) $C = x+y$, biết $(x+\sqrt{x^2+3})(y+\sqrt{y^2+3})=3$;

d) $D = \sqrt{16-2x+x^2} + \sqrt{9-2x+x^2}$, biết $\sqrt{16-2x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2} = 1$.

e) $E = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$, biết $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = a$.

Dạng 3: Bài toán tổng hợp kiến thức và kỹ năng tính toán.

Bài 1: Cho biểu thức $P = \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P nếu $x = 4(2 - \sqrt{3})$.

c) Tính giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 2: Xét biểu thức $A = \frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} - \frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$.

a) Rút gọn A.

b) Biết $a > 1$, hãy so sánh A với $|A|$.

c) Tìm a để $A = 2$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 3: Cho biểu thức $C = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

a) Rút gọn biểu thức C.

b) Tính giá trị của C với $x = \frac{4}{9}$.

c) Tính giá trị của x để $|C| = \frac{1}{3}$.

Bài 4: Cho biểu thức $M = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$

a) Rút gọn M.

b) Tính giá trị M nếu $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.

c) Tìm điều kiện của a, b để $M < 1$.

Bài 5: Xét biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$.

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng nếu $0 < x < 1$ thì $P > 0$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Bài 6: Xét biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn Q.

b) Tìm các giá trị của x để $Q < 1$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị tương ứng của Q cũng là số nguyên.

Bài 7: Xét biểu thức $H = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{x-y}\right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) Rút gọn H.

b) Chứng minh $H \geq 0$.

c) So sánh H với \sqrt{H} .

Bài 8: Xét biểu thức $A = \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a-1}\right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm các giá trị của a sao cho $A > 1$.

c) Tính các giá trị của A nếu $a = 2007 - 2\sqrt{2006}$.

Bài 9: Xét biểu thức $M = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn M.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị tương ứng của M cũng là số nguyên.

Bài 10: Xét biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị của x sao cho $P = \frac{1}{2}$.

c) So sánh P với $\frac{2}{3}$.

Chuyên đề 2: Phương trình bậc hai và định lí Viết.

Dạng 1: Giải phương trình bậc hai.

Bài 1: Giải các phương trình

- 1) $x^2 - 6x + 14 = 0$;
- 2) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;
- 3) $3x^2 + 5x + 2 = 0$;
- 4) $-30x^2 + 30x - 7,5 = 0$;
- 5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;
- 6) $x^2 - 2x - 2 = 0$;
- 7) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 3(x + \sqrt{2})$;
- 8) $2\sqrt{3}x^2 + x + 1 = \sqrt{3}(x + 1)$;
- 9) $x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 2\sqrt{3} = 0$.

Bài 2: Giải các phương trình sau bằng cách nhẩm nghiệm:

- 1) $3x^2 - 11x + 8 = 0$;
- 2) $5x^2 - 17x + 12 = 0$;
- 3) $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$;
- 4) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0$;
- 5) $3x^2 - 19x - 22 = 0$;
- 6) $5x^2 + 24x + 19 = 0$;
- 7) $(\sqrt{3} + 1)x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 = 0$;
- 8) $x^2 - 11x + 30 = 0$;
- 9) $x^2 - 12x + 27 = 0$;
- 10) $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Dạng 2: Chứng minh phương trình có nghiệm, vô nghiệm.

Bài 1: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm.

- 1) $x^2 - 2(m - 1)x - 3 - m = 0$;
- 2) $x^2 + (m + 1)x + m = 0$;
- 3) $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$;
- 4) $x^2 + 2(m + 2)x - 4m - 12 = 0$;
- 5) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$;
- 6) $x^2 - 2x - (m - 1)(m - 3) = 0$;
- 7) $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$;
- 8) $(m + 1)x^2 - 2(2m - 1)x - 3 + m = 0$;
- 9) $ax^2 + (ab + 1)x + b = 0$.

Bài 2:

a) Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực thì phương trình sau luôn có nghiệm:

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

b) Chứng minh rằng với ba số thức a, b, c phân biệt thì phương trình sau có hai nghiệm

phân biệt: $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ (đảm x)

c) Chứng minh rằng phương trình: $c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ vô nghiệm với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

d) Chứng minh rằng phương trình bậc hai:

$$(a + b)^2x^2 - (a - b)(a^2 - b^2)x - 2ab(a^2 + b^2) = 0$$
 luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3:

a) Chứng minh rằng ít nhất một trong các phương trình bậc hai sau đây có nghiệm:

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$$

$$bx^2 + 2cx + a = 0 \quad (2)$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0 \quad (3)$$

b) Cho bốn phương trình (đảm x) sau:

$$x^2 + 2ax + 4b^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 2bx + 4a^2 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 4ax + b^2 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 4bx + a^2 = 0 \quad (4)$$

Chứng minh rằng trong các phương trình trên có ít nhất 2 phương trình có nghiệm.

c) Cho 3 phương trình (ẩn x sau):

$$ax^2 - \frac{2b\sqrt{b+c}}{b+c}x + \frac{1}{c+a} = 0 \quad (1)$$

$$bx^2 - \frac{2c\sqrt{c+a}}{c+a}x + \frac{1}{a+b} = 0 \quad (2)$$

$$cx^2 - \frac{2a\sqrt{a+b}}{a+b}x + \frac{1}{b+c} = 0 \quad (3)$$

với a, b, c là các số dương cho trước.

Chứng minh rằng trong các phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Bài 4:

a) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Biết $a \neq 0$ và $5a + 4b + 6c = 0$, chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm.

b) Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm nếu một trong hai điều kiện sau được thoả mãn:

$$a(a + 2b + 4c) < 0;$$

$$5a + 3b + 2c = 0.$$

Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức đối xứng, lập phương trình bậc hai nhờ nghiệm của phương trình bậc hai cho trước.

Bài 1: Gọi $x_1 ; x_2$ là các nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x - 7 = 0$.

Tính:

$$A = x_1^2 + x_2^2;$$

$$B = |x_1 - x_2|;$$

$$C = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1};$$

$$D = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1);$$

$$E = x_1^3 + x_2^3;$$

$$F = x_1^4 + x_2^4$$

Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $\frac{1}{x_1 - 1}$ và $\frac{1}{x_2 - 1}$.

Bài 2: Gọi $x_1 ; x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $5x^2 - 3x - 1 = 0$. Không giải phương trình, tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = 2x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 3x_1x_2^2;$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2 + 1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1 + 1} - \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)^2;$$

$$C = \frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2}.$$

Bài 3:

a) Gọi p và q là nghiệm của phương trình bậc hai: $3x^2 + 7x + 4 = 0$. Không giải phương trình hãy thành lập phương trình bậc hai với hệ số bằng số mà các nghiệm của nó là $\frac{p}{q-1}$ và $\frac{q}{p-1}$.

b) Lập phương trình bậc hai có 2 nghiệm là $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$.

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ với mọi m.

b) Với $m \neq 0$, lập phương trình ẩn y thoả mãn $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$ và $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$.

Bài 5: Không giải phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Hãy tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = (3x_1 - 2x_2)(3x_2 - 2x_1); \quad B = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1};$$

$$C = |x_1 - x_2|; \quad D = \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2}$$

Bài 6: Cho phương trình $2x^2 - 4x - 10 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Không giải phương trình hãy thiết lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn: $y_1 = 2x_1 - x_2$; $y_2 = 2x_2 - x_1$

Bài 7: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Hãy thiết lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn:

$$a) \begin{cases} y_1 = x_1 + 2 \\ y_2 = x_2 + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y_1 = \frac{x_1^2}{x_2} \\ y_2 = \frac{x_2^2}{x_1} \end{cases}$$

Bài 8: Cho phương trình $x^2 + x - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Hãy thiết lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn:

$$a) \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} = 3x_1 + 3x_2 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + 5x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Bài 9: Cho phương trình $2x^2 + 4ax - a = 0$ (a tham số, $a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Hãy lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn:

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \text{ và } \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = x_1 + x_2$$

Dạng 4: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, có nghiệm kép, vô nghiệm.

Bài 1:

a) Cho phương trình $(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x - m = 0$ (ẩn x).

Xác định m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.

b) Cho phương trình $(2m - 1)x^2 - 2(m + 4)x + 5m + 2 = 0$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

a) Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$.

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm.

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó.

b) Cho phương trình: $(a - 3)x^2 - 2(a - 1)x + a - 5 = 0$.

Tìm a để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 2:

a) Cho phương trình: $\frac{4x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{2(2m - 1)x}{x^2 + 1} + m^2 - m - 6 = 0$.

Xác định m để phương trình có ít nhất một nghiệm.

b) Cho phương trình: $(m^2 + m - 2)(x^2 + 4)^2 - 4(2m + 1)x(x^2 + 4) + 16x^2 = 0$. Xác

định m để phương trình có ít nhất một nghiệm.

Dạng 5: Xác định tham số để các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thoả mãn điều kiện cho trước.

Bài 1: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$

- 1) Xác định m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.
- 2) Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 4. Tính nghiệm còn lại.
- 3) Với điều kiện nào của m thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu (trái dấu)
- 4) Với điều kiện nào của m thì phương trình có hai nghiệm cùng dương (cùng âm).
- 5) Định m để phương trình có hai nghiệm sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.
- 6) Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ thoả mãn $2x_1 - x_2 = -2$.
- 7) Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ sao cho $A = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2$ nhận giá trị nhỏ nhất.

Bài 2: Định m để phương trình có nghiệm thoả mãn hệ thức đã chỉ ra:

- a) $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0$; $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$
- b) $mx^2 - (m-4)x + 2m = 0$; $2(x_1^2 + x_2^2) = 5x_1x_2$
- c) $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$; $4(x_1^2 + x_2^2) = 5x_1^2x_2^2$
- d) $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$; $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$.

Bài 3: Định m để phương trình có nghiệm thoả mãn hệ thức đã chỉ ra:

- a) $x^2 + 2mx - 3m - 2 = 0$; $2x_1 - 3x_2 = 1$
- b) $x^2 - 4mx + 4m^2 - m = 0$; $x_1 = 3x_2$
- c) $mx^2 + 2mx + m - 4 = 0$; $2x_1 + x_2 + 1 = 0$
- d) $x^2 - (3m - 1)x + 2m^2 - m = 0$; $x_1 = x_2^2$
- e) $x^2 + (2m - 8)x + 8m^3 = 0$; $x_1 = x_2^2$
- f) $x^2 - 4x + m^2 + 3m = 0$; $x_1^2 + x_2 = 6$.

Bài 4:

- a) Cho phương trình: $(m+2)x^2 - (2m-1)x - 3 + m = 0$. Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$ sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.
- b) Chứ phuong trình bậc hai: $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ sao cho biểu thức $R = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.
- c) Định m để hiệu hai nghiệm của phương trình sau đây bằng 2.

$$mx^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0.$$

Bài 5: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình có hai nghiệm mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia là $9ac = 2b^2$.

Bài 6: Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình có hai nghiệm mà nghiệm này gấp k lần nghiệm kia ($k > 0$) là :

$$kb^2 = (k+1)^2 \cdot ac$$

Dạng 6: So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số.

Bài 1:

- a) Cho phương trình $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ thoả mãn $1 < x_1 < x_2 < 6$.
- b) Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$ thoả mãn: $-1 < x_1 < x_2 < 1$.

Bài 2: Cho $f(x) = x^2 - 2(m+2)x + 6m + 1$.

- a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm với mọi m.

- b) Đặt $x = t + 2$. Tính $f(x)$ theo t , từ đó tìm điều kiện đối với m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 2.

Bài 3: Cho phương trình bậc hai: $x^2 + 2(a + 3)x + 4(a + 3) = 0$.

- a) Với giá trị nào của tham số a , phương trình có nghiệm kép. Tính các nghiệm kép.
b) Xác định a để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn — 1.

Bài 4: Cho phương trình: $x^2 + 2(m - 1)x - (m + 1) = 0$.

- a) Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1 và một nghiệm lớn hơn 1.
b) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm nhỏ hơn 2.

Bài 5: Tìm m để phương trình: $x^2 - mx + m = 0$ có nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq -2 \leq x_2$.

Dạng 7: Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình bậc hai không phụ thuộc tham số.

Bài 1:

- a) Cho phương trình: $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào tham số m .
b) Cho phương trình bậc hai: $(m - 2)x^2 - 2(m + 2)x + 2(m - 1) = 0$. Khi phương trình có nghiệm, hãy tìm một hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số m .
c) Cho phương trình: $8x^2 - 4(m - 2)x + m(m - 4) = 0$. Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Tìm hệ thức giữa hai nghiệm độc lập với m , suy ra vị trí của các nghiệm đối với hai số — 1 và 1.

Bài 2: Cho phương trình bậc hai: $(m - 1)^2x^2 - (m - 1)(m + 2)x + m = 0$. Khi phương trình có nghiệm, hãy tìm một hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số m .

Bài 3: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$.

- a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm x_1 , x_2 với mọi m .
b) Tìm biểu thức liên hệ giữa $x_1 ; x_2$ không phụ thuộc vào m .
c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ thỏa mãn: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -\frac{5}{2}$.

Bài 4: Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$.

- a) Giải và biện luận phương trình theo m .
b) Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$:
- Tìm một hệ thức giữa $x_1 ; x_2$ độc lập với m .
- Tìm m sao cho $|x_1 - x_2| \geq 2$.

Bài 5: Cho phương trình $(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ thì: $4x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0$.

Dạng 8: Mối quan hệ giữa các nghiệm của hai phương trình bậc hai.

Kiến thức cần nhớ:

1/ Định giá trị của tham số để phương trình này có một nghiệm bằng k ($k \neq 0$) lần một nghiệm của phương trình kia:

Xét hai phương trình:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \quad (1) \\ a'x^2 + b'x + c' &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

trong đó các hệ số a, b, c, a', b', c' phụ thuộc vào tham số m .

Định m để sao cho phương trình (2) có một nghiệm bằng k ($k \neq 0$) lần một nghiệm của phương trình (1), ta có thể làm như sau:

- i) Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì kx_0 là một nghiệm của phương trình (2), suy ra hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ a'k^2x_0^2 + b'kx_0 + c' = 0 \end{cases} (*)$$

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp thế hoặc cộng đồng đại số để tìm m.

ii) Thay các giá trị m vừa tìm được vào hai phương trình (1) và (2) để kiểm tra lại.

2/ Định giá trị của tham số m để hai phương trình bậc hai tương đương với nhau.

Xét hai phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0 \quad (a' \neq 0) \quad (4)$$

Hai phương trình (3) và (4) tương đương với nhau khi và chỉ khi hai phương trình có cùng 1 tập nghiệm (kể cả tập nghiệm là rỗng).

Do đó, muốn xác định giá trị của tham số để hai phương trình bậc hai tương đương với nhau ta xét hai trường hợp sau:

i) Trường hợp cả hai phương trình có cùng vô nghiệm, tức là:

$$\begin{cases} \Delta_{(3)} < 0 \\ \Delta_{(4)} < 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được giá trị của tham số.

ii) Trường hợp cả hai phương trình đều có nghiệm, ta giải hệ sau:

$$\begin{cases} \Delta_{(3)} \geq 0 \\ \Delta_{(4)} \geq 0 \\ S_{(3)} = S_{(4)} \\ P_{(3)} = P_{(4)} \end{cases}$$

Chú ý: Bằng cách đặt $y = x^2$ hệ phương trình (*) có thể đưa về hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn như sau:

$$\begin{cases} bx + ay = -c \\ b'x + a'y = -c' \end{cases}$$

Để giải quyết tiếp bài toán, ta làm như sau:

- Tìm điều kiện để hệ có nghiệm rồi tính nghiệm (x ; y) theo m.
- Tìm m thoả mãn $y = x^2$.
- Kiểm tra lại kết quả.
-

Bài 1: Tìm m để hai phương trình sau có nghiệm chung:

$$2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$$

$$4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$$

Bài 2: Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung. Tìm nghiệm chung đó:

$$a) 2x^2 + (3m + 1)x - 9 = 0; \quad 6x^2 + (7m - 1)x - 19 = 0.$$

$$b) 2x^2 + mx - 1 = 0; \quad mx^2 - x + 2 = 0.$$

$$c) x^2 - mx + 2m + 1 = 0; \quad mx^2 - (2m + 1)x - 1 = 0.$$

Bài 3: Xét các phương trình sau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$cx^2 + bx + a = 0 \quad (2)$$

Tìm hệ thức giữa a, b, c là điều kiện cần và đủ để hai phương trình trên có một nghiệm chung duy nhất.

Bài 4: Cho hai phương trình:

$$x^2 - 2mx + 4m = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - mx + 10m = 0 \quad (2)$$

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (2) có một nghiệm bằng hai lần một nghiệm của phương trình (1).

Bài 5: Cho hai phương trình:

$$\begin{aligned}x^2 + x + a &= 0 \\x^2 + ax + 1 &= 0\end{aligned}$$

- a) Tìm các giá trị của a để cho hai phương trình trên có ít nhất một nghiệm chung.
b) Với những giá trị nào của a thì hai phương trình trên tương đương.

Bài 6: Cho hai phương trình:

$$\begin{aligned}x^2 + mx + 2 &= 0 \quad (1) \\x^2 + 2x + m &= 0 \quad (2)\end{aligned}$$

- a) Định m để hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung.
b) Định m để hai phương trình tương đương.
c) Xác định m để phương trình $(x^2 + mx + 2)(x^2 + 2x + m) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

Bài 7: Cho các phương trình:

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + k &= 0 \quad (1) \\x^2 - 7x + 2k &= 0 \quad (2)\end{aligned}$$

Xác định k để một trong các nghiệm của phương trình (2) lớn gấp 2 lần một trong các nghiệm của phương trình (1).

Chuyên đề 3: Hệ phương trình.

A - Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

Dạng 1: Giải hệ phương trình cơ bản và đưa được về dạng cơ bản

Bài 1: Giải các hệ phương trình

$$\begin{array}{lll}1) \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}; & 2) \begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}; & 3) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases} \\4) \begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ 5x + 2y = 14 \end{cases}; & 5) \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}; & 6) \begin{cases} 4x - 6y = 9 \\ 10x - 15y = 18 \end{cases}\end{array}$$

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll}1) \begin{cases} (3x+2)(2y-3) = 6xy \\ (4x+5)(y-5) = 4xy \end{cases}; & 2) \begin{cases} (2x-3)(2y+4) = 4x(y-3) + 54 \\ (x+1)(3y-3) = 3y(x+1) - 12 \end{cases}; \\3) \begin{cases} \frac{2y-5x}{3} + 5 = \frac{y+27}{4} - 2x \\ \frac{x+1}{3} + y = \frac{6y-5x}{7} \end{cases}; & 4) \begin{cases} \frac{7x+5y-2}{x+3y} = -8 \\ \frac{6x-3y+10}{5x+6y} = 5 \end{cases}\end{array}$$

Dạng 2: Giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{lll}1) \begin{cases} \frac{2}{x+2y} + \frac{1}{y+2x} = 3 \\ \frac{4}{x+2y} - \frac{3}{y+2x} = 1 \end{cases}; & 2) \begin{cases} \frac{3x}{x+1} - \frac{2}{y+4} = 4 \\ \frac{2x}{x+1} - \frac{5}{y+4} = 9 \end{cases}; & 3) \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} + \frac{3y}{y+2} = 7 \\ \frac{2}{x-1} - \frac{5}{y+2} = 4 \end{cases}; \\4) \begin{cases} 2(x^2 - 2x) + \sqrt{y+1} = 0 \\ 3(x^2 - 2x) - 2\sqrt{y+1} + 7 = 0 \end{cases}; & 5) \begin{cases} 5|x-1| - 3|y+2| = 7 \\ 2\sqrt{4x^2 - 8x + 4} + 5\sqrt{y^2 + 4y + 4} = 13. \end{cases}\end{array}$$

Dạng 3: Xác định giá trị của tham số để hệ có nghiệm thoả mãn điều kiện cho trước

Bài 1:

- a) Định m và n để hệ phương trình sau có nghiệm là (2 ; -1).

$$\begin{cases} 2mx - (n+1)y = m-n \\ (m+2)x + 3ny = 2m-3 \end{cases}$$

- b) Định a và b biết phương trình: $ax^2 - 2bx + 3 = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$.

Bài 2: Định m để 3 đường thẳng sau đồng quy:

- a) $2x - y = m$; $x = y = 2m$; $mx - (m-1)y = 2m-1$
 b) $mx + y = m^2 + 1$; $(m+2)x - (3m+5)y = m-5$; $(2-m)x - 2y = -m^2 + 2m - 2$.

Bài 3: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases} \quad (\text{m là tham số})$$

- a) Giải hệ phương trình khi $m = \sqrt{2}$.
 b) Giải và biện luận hệ theo m.
 c) Xác định các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) sao cho $x > 0, y > 0$.
 d) Với giá trị nguyên nào của m thì hệ có nghiệm ($x ; y$) với x, y là các số nguyên dương.
 e) Định m để hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) sao cho $S = x^2 - y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 (câu hỏi tương tự với $S = xy$).
 f) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) thì điểm $M(x ; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi m nhận các giá trị khác nhau.

Bài 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases}$

- a) Giải và biện luận hệ theo m.
 b) Với các giá trị nguyên nào của m thì hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) sao cho $x > 0, y < 0$.
 c) Định m để hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) mà $P = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 d) Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) thoả mãn $x^2 + 2y = 0$. (Hoặc: sao cho $M(x ; y)$ nằm trên parabol $y = -0,5x^2$).
 e) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) thì điểm $D(x ; y)$ luôn luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi m nhận các giá trị khác nhau.

Bài 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$

- a) Giải hệ phương trình trên khi $m = 2$.
 b) Tìm các số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) mà $x > 0$ và $y < 0$.
 c) Tìm các số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) mà x, y là các số nguyên.
 d) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất ($x ; y$) mà $S = x - y$ đạt giá trị lớn nhất.

B - Một số hệ bậc hai đơn giản:**Dạng 1: Hệ đối xứng loại I**

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases}$

Bài tập tương tự:

Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} xy + x + y = 19 \\ x^2y + xy^2 = 84 \end{cases} \\
 5) \begin{cases} (x+1)(y+1) = 8 \\ x(x+1) + y(y+1) + xy = 17 \end{cases} \\
 7) \begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases} \\
 9) \begin{cases} (x-y)^2 - (x-y) = 6 \\ 5(x^2 + y^2) = 5xy \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases} \\
 4) \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases} \\
 6) \begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x+y)(xy - 1) = 3 \end{cases} \\
 8) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y) \end{cases} \\
 10) \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}
 \end{array}$$

Dạng 2: Hệ đối xứng loại II

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$

Bài tập tương tự:

Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ y^2 + 1 = 3x \end{cases} & 2) \begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ xy^2 + 2 = x^2 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases} & 4) \begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{cases} \\
 5) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases} & 6) \begin{cases} x - 3y = 4\frac{y}{x} \\ y - 3x = 4\frac{x}{y} \end{cases} \\
 7) \begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases} & 8) \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases} \\
 9) \begin{cases} x^2 - 3x = y \\ y^2 - 3y = x \end{cases} & 10) \begin{cases} x^3 = 7x + 3y \\ y^3 = 7y + 3x \end{cases}
 \end{array}$$

Dạng 3: Hệ bậc hai giải bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số

Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + xy + 3 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2xy - x^2 + 4x = -4 \\ x^2 - 2xy + y - 5x = 4 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2(x+y)^2 - 3(x+y) - 5 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ (x-2)(y-3) = 18 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} xy + x - y = 1 \\ xy - 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x(x-8) + 3y(y+1) = -6 \\ 2x(x-8) + 5y(y+1) = -14 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 12 \\ xy - x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + 2y + 2xy - 11 = 0 \\ xy + y - x = 4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5(x-y)^2 + 3(x-y) = 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} xy + 2x - y - 2 = 0 \\ xy - 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

Chuyên đề 4: Hàm số và đồ thị.

Dạng 1: Vẽ đồ thị hàm số

Bài 1: Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 2x - 5$;

b) $y = -0,5x + 3$

Bài 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ khi:

a) $a = 2$;

b) $a = -1$.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng

Bài 1: Viết phương trình đường thẳng (d) biết:

a) (d) đi qua A(1 ; 2) và B(-2 ; -5)

b) (d) đi qua M(3 ; 2) và song song với đường thẳng (Δ) : $y = 2x - 1/5$.

c) (d) đi qua N(1 ; -5) và vuông góc với đường thẳng (d') : $y = -1/2x + 3$.

d) (d) đi qua D(1 ; 3) và tạo với chiều dương trục Ox một góc 30° .

e) (d) đi qua E(0 ; 4) và đồng quy với hai đường thẳng

f) (Δ): $y = 2x - 3$; (Δ'): $y = 7 - 3x$ tại một điểm.

g) (d) đi qua K(6 ; -4) và cách gốc O một khoảng bằng $12/5$ (đơn vị dài).

Bài 2: Gọi (d) là đường thẳng $y = (2k - 1)x + k - 2$ với k là tham số.

a) Định k để (d) đi qua điểm (1 ; 6).

b) Định k để (d) song song với đường thẳng $2x + 3y - 5 = 0$.

c) Định k để (d) vuông góc với đường thẳng $x + 2y = 0$.

d) Chứng minh rằng không có đường thẳng (d) nào đi qua điểm A(-1/2 ; 1).

e) Chứng minh rằng khi k thay đổi, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

Dạng 3: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và parabol**Bài 1:**

- a) Biết đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $(-2; -1)$. Hãy tìm a và vẽ đồ thị (P) đó.
 b) Gọi A và B là hai điểm lần lượt trên (P) có hoành độ lần lượt là 2 và -4 . Tìm toạ độ A và B từ đó suy ra phương trình đường thẳng AB.

Bài 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
 b) Lập phương trình đường thẳng (d) qua $A(-2; -2)$ và tiếp xúc với (P).

Bài 3:

Trong cùng hệ trục vuông góc, cho parabol (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (D): $y = mx - 2m - 1$.

- a) Vẽ đồ thị (P).
 b) Tìm m sao cho (D) tiếp xúc với (P).
 c) Chứng tỏ rằng (D) luôn đi qua một điểm cố định A thuộc (P).

Bài 4: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
 b) Trên (P) lấy hai điểm M và N lần lượt có hoành độ là $-2; 1$. Viết phương trình đường thẳng MN.
 c) Xác định hàm số $y = ax + b$ biết rằng đồ thị (D) của nó song song với đường thẳng MN và chỉ cắt (P) tại một điểm.

Bài 5:

Trong cùng hệ trục toạ độ, cho Parabol (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (D): $y = kx + b$.

- 1) Tìm k và b cho biết (D) đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -1)$.
- 2) Tìm a biết rằng (P) tiếp xúc với (D) vừa tìm được ở câu 1).
- 3) Vẽ (D) và (P) vừa tìm được ở câu 1) và câu 2).
- 4) Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm $C\left(\frac{3}{2}; -1\right)$ và có hệ số góc m
 - a) Viết phương trình của (d).
 - b) Chứng tỏ rằng qua điểm C có hai đường thẳng (d) tiếp xúc với (P) (ở câu 2) và vuông góc với nhau.

Chuyên đề 5: Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.**Dạng 1: Chuyển động (trên đường bộ, trên đường sông có tính đến dòng nước chảy)****Bài 1:**

Một ôtô đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

Bài 2:

Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120 km với vận tốc dự định trước. Sau khi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

Bài 3:

Một canô xuôi từ bến sông A đến bến sông B với vận tốc 30 km/h, sau đó lại ngược từ B trở về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian đi ngược 1 giờ 20 phút. Tính

khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của canô lúc xuôi và lúc ngược bằng nhau.

Bài 4:

Một canô xuôi một khúc sông dài 90 km rồi ngược về 36 km. Biết thời gian xuôi dòng sông nhiều hơn thời gian ngược dòng là 2 giờ và vận tốc khi xuôi dòng hơn vận tốc khi ngược dòng là 6 km/h. Hỏi vận tốc canô lúc xuôi và lúc ngược dòng.

Dạng 2: Toán làm chung \square làm riêng (toán vòi nước)

Bài 1:

Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người chỉ làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi một người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong?

Bài 2:

Nếu vòi A chảy 2 giờ và vòi B chảy trong 3 giờ thì được $\frac{4}{5}$ hồ. Nếu vòi A chảy trong 3 giờ và vòi B chảy trong 1 giờ 30 phút thì được $\frac{1}{2}$ hồ. Hỏi nếu chảy một mình mỗi vòi chảy trong bao lâu mới đầy hồ.

Bài 3:

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi II cần nhiều thời gian hơn vòi I là 5 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

Dạng 3: Toán liên quan đến tỉ lệ phần trăm.

Bài 1:

Trong tháng giêng hai tổ sản xuất được 720 chi tiết máy. Trong tháng hai, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 12% nên sản xuất được 819 chi tiết máy. Tính xem trong tháng giêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Bài 2:

Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2%, còn tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân của cả hai tỉnh năm nay là 4 045 000 người. Tính số dân của mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay?

Dạng 4: Toán có nội dung hình học.

Bài 1:

Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 280 m. Người ta làm lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 2 m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng rau là 4256 m^2 .

Bài 2:

Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài lên 10 m, tăng chiều rộng lên 5 m thì diện tích tăng 500 m^2 . Nếu giảm chiều dài 15 m và giảm chiều rộng 9 m thì diện tích giảm 600 m^2 . Tính chiều dài, chiều rộng ban đầu.

Bài 3:

Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên 2 cm và 3 cm thì diện tích tam giác tăng 50 cm^2 . Nếu giảm cả hai cạnh đi 2 cm thì diện tích sẽ giảm đi 32 cm^2 . Tính hai cạnh góc vuông.

Dạng 5: Toán về tìm số.

Bài 1:

Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

Bài 2:

Tìm một số có hai chữ số, biết rằng số đó gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và số dư là 3.

Bài 3:

Nếu tử số của một phân số được tăng gấp đôi và mẫu số thêm 8 thì giá trị của phân số bằng $\frac{1}{4}$. Nếu tử số thêm 7 và mẫu số tăng gấp 3 thì giá trị phân số bằng $\frac{5}{24}$. Tìm phân số đó.

Bài 4:

Nếu thêm 4 vào tử và mẫu của một phân số thì giá trị của phân số giảm 1. Nếu bớt 1 vào cả tử và mẫu, phân số tăng $\frac{3}{2}$. Tìm phân số đó.

Chuyên đề 6: Phương trình quy về phương trình bậc hai.**Dạng 1: Phương trình có ẩn số ở mẫu.**

Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x}{x-2} + \frac{x+3}{x-1} = 6$$

$$b) \frac{2x-1}{x} + 3 = \frac{x+3}{2x-1}$$

$$c) \frac{t^2}{t-1} + t = \frac{2t^2 + 5t}{t+1}$$

Dạng 2: Phương trình chứa căn thức.

$$\text{Loại } \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \quad (\text{hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

$$\text{Loại } \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{2x^2 - 3x - 11} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$b) \sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{3x^2 - 5x + 14}$$

$$c) \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1$$

$$d) \sqrt{(x-1)(2x-3)} = -x - 9$$

$$e) (x-1)\sqrt{x^2 - 3x}$$

Dạng 3: Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Giải các phương trình sau:

$$a) |x-1| + x^2 = x + 3$$

$$b) |x+2| - 2x + 1 = x^2 + 2x + 3$$

$$c) |x^4 + 2x^2 + 2| + x^2 + x = x^4 - 4x$$

$$d) |x^2 + 1| - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3x$$

Dạng 4: Phương trình trùng phương.

Giải các phương trình sau:

$$a) 4x^4 + 7x^2 - 2 = 0;$$

$$b) x^4 - 13x^2 + 36 = 0;$$

$$c) 2x^4 + 5x^2 + 2 = 0;$$

$$d) (2x+1)^4 - 8(2x+1)^2 - 9 = 0.$$

Dạng 5: Phương trình bậc cao.

Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích hoặc đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai:

Bài 1:

a) $2x^3 - 7x^2 + 5x = 0$;
 c) $x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$;

b) $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$;
 d) $x^4 = (2x^2 - 4x + 1)^2$.

Bài 2:

a) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$

c) $x^2 - x + 2\sqrt{x^2 - x + 3} = 0$

e) $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$

g) $3(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0$

i) $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$

c) $(x^2 + 4x + 2)^2 + 4x^2 + 16x + 11 = 0$

d) $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 23 = 0$

f) $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0$

h) $\frac{x^2}{3} - \frac{48}{x^2} - 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right) = 0$

k) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

Bài 3:

a) $6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$

b) $10x^4 - 77x^3 + 105x^2 - 77x + 10 = 0$

c) $(x - 4,5)^4 + (x - 5,5)^4 = 1$

d) $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$

Bài tập về nhà:

Giải các phương trình sau:

1. a) $\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{4x}{x+1} + \frac{x+3}{x} = 6$

c) $\frac{2x+2}{4} - x = \frac{x-2}{x-4}$

d) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-9} + \frac{2x^2-2}{x^2-3x+2} = 8$

2.

a) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

b) $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

c) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

d) $9x^4 - 4(9m^2 + 4)x^2 + 64m^2 = 0$

e) $a^2x^4 - (m^2a^2 + b^2)x^2 + m^2b^2 = 0$ ($a \neq 0$)

3.

a) $(2x^2 - 5x + 1)^2 - (x^2 - 5x + 6)^2 = 0$

b) $(4x - 7)(x^2 - 5x + 4)(2x^2 - 7x + 3) = 0$

c) $(x^3 - 4x^2 + 5)^2 = (x^3 - 6x^2 + 12x - 5)^2$

d) $(x^2 + x - 2)^2 + (x - 1)^4 = 0$

e) $(2x^2 - x - 1)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$

4.

a) $x^4 - 4x^3 - 9(x^2 - 4x) = 0$

b) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 100 = 0$

c) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0$

d) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$

5.

a) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

b) $2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$

c) $x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0$

d) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0$

e) $x^3 - 2x^2 - 4x - 3 = 0$

6.

a) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

b) $(x^4 + 4x^2 + 4) - 4(x^2 + 2) - 77 = 0$

c) $x^2 - 4x - 10 - 3\sqrt{(x+2)(x-6)} = 0$

d) $\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 - 4\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + 3 = 0$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{5-x} + \sqrt{x(5-x)} = 5$

7.

a) $(x+1)(x+4)(x^2+5x+6)=24$

c) $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$

b) $(x+2)^2(x^2+4x)=5$

d) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

8.

a) $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{x + 14}$

c) $\sqrt{2x^2 + 6x + 1} = x + 2$

e) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + x - 2 = x^2 - 3$

b) $\sqrt{2x^2 + x - 9} = |x - 1|$

d) $\sqrt{x^3 + 3x + 4} = x - 2$

f) $|x^3 + x^2 - 1| = x^3 + x + 1$

9. Định a để các phương trình sau có 4 nghiệm

a) $x^4 - 4x^2 + a = 0$

c) $2t^4 - 2at^2 + a^2 - 4 = 0$.

b) $4y^4 - 2y^2 + 1 - 2a = 0$

PHẦN II: HÌNH HỌC

Chuyên đề 1: Nhận biết hình, tìm điều kiện của một hình.

Bài 1:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. D và E lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB và AC. DE cắt AB ở I và cắt AC ở L.

- a) Chứng minh $DI = IL = LE$.
- b) Chứng minh tứ giác BCED là hình chữ nhật.
- c) Chứng minh tứ giác ADOE là hình thoi và tính các góc của hình này.

Bài 2:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có các đường chéo vuông góc với nhau tại I.

- a) Chứng minh rằng nếu từ I ta hạ đường vuông góc xuống một cạnh của tứ giác thì đường vuông góc này qua trung điểm của cạnh đối diện của cạnh đó.
- b) Gọi M, N, R, S là trung điểm của các cạnh của tứ giác đã cho. Chứng minh MNRS là hình chữ nhật.
- c) Chứng minh đường ngoại tiếp hình chữ nhật này đi qua chân các đường vuông góc hạ từ I xuống các cạnh của tứ giác.

Bài 3:

Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 1v$) có AH là đường cao. Hai đường tròn đường kính AB và AC có tâm là O_1 và O_2 . Một cát tuyến biến đổi đi qua A cắt đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại M và N.

- a) Chứng minh tam giác MHN là tam giác vuông.
- b) Tứ giác MBCN là hình gì?
- c) Gọi F, E, G lần lượt là trung điểm của O_1O_2 , MN, BC. Chứng minh F cách đều 4 điểm E, G, A, H.
- d) Khi cát tuyến MAN quay xung quanh điểm A thì E vạch một đường như thế nào?

Bài 4:

Cho hình vuông ABCD. Lấy B làm tâm, bán kính AB, vẽ $1/4$ đường tròn phía trong hình vuông. Lấy AB làm đường kính, vẽ $1/2$ đường tròn phía trong hình vuông. Gọi P là điểm tùy ý trên cung AC (không trùng với A và C). H và K lần lượt là hình chiếu của P trên AB và AD, PA và PB cắt nửa đường tròn lần lượt ở I và M.

- a) Chứng minh I là trung điểm của AP.
- b) Chứng minh PH, BI, AM đồng quy.
- c) Chứng minh $PM = PK = AH$
- d) Chứng minh tứ giác APMH là hình thang cân.
- đ) Tìm vị trí điểm P trên cung AC để tam giác APB là đều.

Chuyên đề 2: Chứng minh tứ giác nội tiếp, chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 1:

Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A, B. Các tiếp tuyến tại A của (O), (O') cắt (O'), (O) lần lượt tại các điểm E, F. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EAF.

- a) Chứng minh tứ giác OAO'I là hình bình hành và $OO' \parallel BI$.
- b) Chứng minh bốn điểm O, B, I, O' cùng thuộc một đường tròn.
- c) Kéo dài AB về phía B một đoạn CB = AB. Chứng minh tứ giác AECF nội tiếp.

Bài 2:

Cho tam giác ABC. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng của H qua trung điểm M của BC.

- Chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp được trong một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.
- Đường thẳng DH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ 2 là I. Chứng minh rằng 5 điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 3:

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tia OA cắt đường tròn (O') tại C, tia O'A cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng:

- Tứ giác OO'CD nội tiếp.
- Tứ giác OBO'C nội tiếp, từ đó suy ra năm điểm O, O', B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 4:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Vẽ EF vuông góc AD. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

- Các tứ giác ABEF, DCEF nội tiếp được.
- Tia CA là tia phân giác của góc BCF.
- * Tứ giác BCMF nội tiếp được.

Bài 5:

Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên cung nhỏ AB lấy một điểm C. Vẽ CD \perp AB, CE \perp MA, CF \perp MB.

Gọi I là giao điểm của AC và DE, K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng:

- Các tứ giác AECD, BFCD nội tiếp được.
- $CD^2 = CE \cdot CF$
- * IK // AB

Bài 6:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn. Vẽ hai đường cao BD và CE.

- Chứng minh rằng bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh rằng xy // DE, từ đó suy ra $OA \perp DE$.

Bài 7:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy một điểm M. Đường thẳng qua A song song với BM cắt CM tại N.

- Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác đều.
- Chứng minh rằng $MA + MB = MC$.
- * Gọi D là giao điểm của AB và CM. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MD}$

Bài 8:

Cho ba điểm A, B, C cố định với B nằm giữa A và C. Một đường tròn (O) thay đổi đi qua B và C. Vẽ đường kính MN vuông góc với BC tại D (M nằm trên cung nhỏ BC). Tia AN cắt đường tròn (O) Tại một điểm thứ hai là F. Hai dây BC và MF cắt nhau tại E. Chứng minh rằng:

- Tứ giác DEFN nội tiếp được.
- $AD \cdot AE = AF \cdot AN$
- Đường thẳng MF đi qua một điểm cố định.

Bài 9:

Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi M là trung điểm của AB. Tia CM cắt đường tròn tại điểm N. Tia AN cắt đường tròn tại điểm D.

- a) Chứng minh rằng $MB^2 = MC \cdot MN$
- b) Chứng minh rằng $AB // CD$
- c) Tìm điều kiện của điểm A để cho tứ giác ABDC là hình thoi. Tính diện tích của hình thoi đó.

Bài 10:

Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Vẽ đường kính MN cắt AB tại I. Gọi D là một điểm thuộc dây AB. Tia MD cắt đường tròn (O) tại C.

- a) Chứng minh rằng tứ giác CDIN nội tiếp được
- b) Chứng minh rằng $MC \cdot MD$ có giá trị không đổi khi D di động trên dây AB.
- c) Gọi O' là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

$$\text{Chứng minh rằng } \angle MAB = \frac{1}{2} \angle AO'D.$$

- d) Chứng minh rằng ba điểm A, O', N thẳng hàng và MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Bài 11:

Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB < AC$), đường cao AH. Trên đoạn thẳng HC lấy D sao cho $HD = HB$. Vẽ CE vuông góc với AD ($E \in AD$).

- a) Chứng minh rằng AHEC là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AHEC.
- c) Chứng minh rằng CH là tia phân giác của góc ACE.
- d) Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng CA, CH và cung nhỏ AH của đường tròn nói trên biết $AC = 6\text{cm}$, $\angle ACB = 30^\circ$.

Bài 12:

Cho đường tròn tâm O có đường kính BC. Gọi A là Một điểm thuộc cung BC ($AB < AC$), D là điểm thuộc bán kính OC. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E, cắt tia BA ở F.

- a) Chứng minh rằng ADCF là tứ giác nội tiếp.
- b) Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $\angle AME = 2 \angle ACB$.
- c) Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- d) Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng BC, BA và cung nhỏ AC của đường tròn (O) biết $BC = 8\text{cm}$, $\angle ABC = 60^\circ$.

Bài 13:

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Điểm M thuộc nửa đường tròn. Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB (H là tiếp điểm). Kẻ các tiếp tuyến AC, BD với đường tròn (M) (C, D là tiếp điểm).

- a) Chứng minh rằng C, M, D thẳng hàng
- b) Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- c) Tính tổng $AC + BD$ theo R.
- d) Tính diện tích tứ giác ABDC biết $\angle AOM = 60^\circ$.

Bài 14:

Cho tam giác vuông cân ABC ($\angle A = 90^\circ$), trung điểm I của cạnh BC. Xét một điểm D trên tia AC. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, BD, DA tại các điểm tương ứng M, N, P.

- a) Chứng minh rằng 5 điểm B, M, O, I, N nằm trên một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng ba điểm N, I, P thẳng hàng.
- c) Gọi giao điểm của tia BO với MN, NP lần lượt là H, K. Tam giác HNK là tam giác gì, tại sao?
- d) Tìm tập hợp điểm K khi điểm D thay đổi vị trí trên tia AC.

Chuyên đề 3: Chứng minh các điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy.

Bài 1:

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và C' . Đường thẳng AO' cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại D và D' .

- a) Chứng minh C, B, D' thẳng hàng
- b) Chứng minh tứ giác $ODC'C'$ nội tiếp
- c) Đường thẳng CD và đường thẳng $D'C'$ cắt nhau tại M . Chứng minh tứ giác $MCBC'$ nội tiếp.

Bài 2:

Từ một điểm C ở ngoài đường tròn (O) kẻ cát tuyến CBA . Gọi IJ là đường kính vuông góc với AB . Các đường thẳng CI, CJ theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại M, N .

- a) Chứng minh rằng IN, JM và AB đồng quy tại một điểm D .
- b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, N đi qua trung điểm E của CD .

Bài 3:

Cho hai đường tròn ($O; R$) và ($O'; R'$) tiếp xúc ngoài tại A ($R > R'$). Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại B và C (B và C khác A). EF là dây cung của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm I của BC , EC cắt đường tròn (O') tại D .

- a) Tứ giác $BEFC$ là hình gì?
- b) Chứng minh ba điểm A, D, F thẳng hàng.
- c) CF cắt đường tròn (O') tại G . Chứng minh ba đường EG, DF và CI đồng quy.
- d) Chứng minh ID tiếp xúc với đường tròn (O').

Bài 4:

Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại C . AC và BC là đường kính của (O) và (O'), DE là tiếp tuyến chung ngoài ($D \in (O)$, $E \in (O')$). AD cắt BE tại M .

- a) Tam giác MAB là tam giác gì?
- b) Chứng minh MC là tiếp tuyến chung của (O) và (O').
- c) Kẻ Ex, By vuông góc với AE, AB . Ex cắt By tại N . Chứng minh D, N, C thẳng hàng.
- d) Về cùng phía của nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ nửa đường tròn đường kính AB và OO' . Đường thẳng qua C cắt hai nửa đường tồn trên tại I, K . Chứng minh $OI // AK$.

Chuyên đề 4: Chứng minh điểm cố định.**Bài 1:**

Cho đường tròn ($O ; R$). Đường thẳng d cắt (O) tại A, B . C thuộc d ở ngoài (O). Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ cắt AB tại D . CP cắt (O) tại điểm thứ hai I , AB cắt IQ tại K .

- a) Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp.
- b) Chứng minh: $CI \cdot CP = CK \cdot CD$.
- c) Chứng minh IC là phân giác ngoài của tam giác AIB .
- d) A, B, C cố định, (O) thay đổi nhưng vẫn luôn qua A, B . Chứng minh rằng IQ luôn đi qua điểm cố định.

Bài 2:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp ($O ; R$). M di động trên AB . N di động trên tia đối của tia CA sao cho $BM = CN$.

- a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại A và D . Chứng minh rằng D cố định.
- b) Tính góc MDN .
- c) MN cắt BC tại K . Chứng minh DK vuông góc với MN .
- d) Đặt $AM = x$. Tính x để diện tích tam giác AMN là lớn nhất.

Bài 3:

Cho $(O; R)$. Điểm M cố định ở ngoài (O) . Cắt tuyến qua M cắt (O) tại A và B. Tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại C.

- a) Chứng minh tứ giác OACB nội tiếp đường tròn tâm K.
- b) Chứng minh: (K) qua hai điểm cố định là O và H khi cát tuyến quay quanh M.
- c) CH cắt AB tại N, I là trung điểm AB. Chứng minh $MA \cdot MB = MI \cdot MN$.
- d) Chứng minh: $IM \cdot IN = IA^2$.

Bài 4:

Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O. C là điểm chính giữa cung AB. M di động trên cung nhỏ AC. Lấy N thuộc BM sao cho $AM = BN$.

- a) So sánh tam giác AMC và BCN.
- b) Tam giác CMN là tam giác gì?
- c) Kẻ dây $AE//MC$. Chứng minh tứ giác BECN là hình bình hành.
- d) Đường thẳng d đi qua N và vuông góc với BM. Chứng minh d luôn đi qua điểm cố định.

Bài 5:

Cho đường tròn $(O; R)$, đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm C và D. Điểm M tùy ý trên d, kẻ tiếp tuyến MA, MB. I là trung điểm của CD.

- a) Chứng minh 5 điểm M, A, I, O, B cùng thuộc một đường tròn.
- b) Gọi H là trực tâm của tam giác MAB, tứ giác OAHB là hình gì?
- c) Khi M di động trên d. Chứng minh rằng AB luôn qua điểm cố định.
- d) Đường thẳng qua C vuông góc với OA cắt AB, AD lần lượt tại E và K. Chứng minh $EC = EK$.

Chuyên đề 5: Chứng minh hai tam giác đồng dạng và chứng minh đẳng thức hình học.

Bài 1:

Cho đường tròn (O) và dây AB. M là điểm chính giữa cung AB. C thuộc AB, dây MD qua C.

- a) Chứng minh $MA^2 = MC \cdot MD$.
- b) Chứng minh $MB \cdot BD = BC \cdot MD$.
- c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tiếp xúc với MB tại B.
- d) Gọi R_1, R_2 là bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và ACD. Chứng minh $R_1 + R_2$ không đổi khi C di động trên AB.

Bài 2:

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$ và một điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn cắt các tiếp tuyến tại A, B lần lượt ở C và E.

- a) Chứng minh rằng $CE = AC + BE$.
- b) Chứng minh $AC \cdot BE = R^2$.
- c) Chứng minh tam giác AMB đồng dạng với tam giác COE.
- d) Xét trường hợp hai đường thẳng AB và CE cắt nhau tại F. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB.

$$+ \text{ Chứng minh rằng: } \frac{HA}{HB} = \frac{FA}{FB}.$$

+ Chứng minh tích OH.OF không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

Bài 3:

Trên cung BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC lấy một điểm P bất kì. Các đường thẳng AP và BC cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng: $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Bài 4:

Cho góc vuông xOy . Trên tia Ox đặt đoạn $OA = a$. Dựng đường tròn ($I ; R$) tiếp xúc với Ox tại A và cắt Oy tại hai điểm B, C . Chứng minh các hệ thức:

- a) $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2}$.
- b) $AB^2 + AC^2 = 4R^2$.

Chuyên đề 6: Các bài toán về tính số đo góc và số đo diện tích.

Bài 1:

Cho hai đường tròn ($O; 3\text{cm}$) và ($O'; 1\text{ cm}$) tiếp xúc ngoài tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O)$; $C \in (O')$).

- a) Chứng minh rằng góc $O'OB$ bằng 60° .
- b) Tính độ dài BC .
- c) Tính diện tích hình giới hạn bởi tiếp tuyến BC và các cung AB, AC của hai đường tròn.

Bài 2:

Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AC = 10\text{ cm}$, $CB = 40\text{ cm}$. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K . Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) ở E . Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

- a) Chứng minh rằng $EC = MN$.
- b) Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).
- c) Tính độ dài MN .
- d) Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn.

Bài 3:

Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba cắt hai tiếp tuyến kia tại P và Q .

- a) Chứng minh rằng: Khi điểm M chuyển động trên cung BC nhỏ thì chu vi tam giác APQ có giá trị không đổi.
- b) Cho biết $BAC = 60^\circ$ và bán kính của đường tròn (O) bằng 6 cm . Tính độ dài của tiếp tuyến AB và diện tích phần mặt phẳng được giới hạn bởi hai tiếp tuyến AB, AC và cung nhỏ BC .

Bài 4:

Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bằng tiếp góc A , O là trung điểm của IK .

- a) Chứng minh rằng: 4 điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng: AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- c) Tính bán kính của đường tròn (O) biết $AB = AC = 20\text{ cm}$, $BC = 24\text{ cm}$.

Bài 5:

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. E là một điểm trên đường tròn mà $AE > EB$. M là một điểm trên đoạn AE sao cho $AM \cdot AE = AO \cdot AB$.

- a) Chứng minh ΔAOM vuông tại O .
- b) OM cắt đường tròn ở C và D . Điểm C và điểm E ở cùng một phía đối với AB . Chứng minh ΔACM đồng dạng với ΔAEC .
- c) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEM .
- d) Giả sử tỉ số diện tích hai tam giác Acm và AEC là $\frac{2}{3}$. Tính AC, AE, AM, CM theo R .

Chuyên đề 7: Toán quỹ tích.

Bài 1:

Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) và M là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu của B trên AM và P là giao điểm của BD với CM.

- a) Chứng minh ΔABP cân.
- b) Tìm quỹ tích của điểm D khi M di chuyển trên đường tròn (O).

Bài 2:

Đường tròn (O ; R) cắt một đường thẳng d tại hai điểm A, B. Từ một điểm M trên d và ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MP, MQ.

- a) Chứng minh rằng góc QMO bằng góc QPO và đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ đi qua hai điểm cố định khi M di động trên d.
- b) Xác định vị trí của M để MQOP là hình vuông?
- c) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn nội tiếp tam giác MPQ khi M di động trên d.

Bài 3:

Hai đường tròn tâm O và I cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường thẳng d đi qua A cắt các đường tròn (O) và (I) lần lượt tại P, Q. Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng PO và QI.

- a) Chứng minh rằng các tứ giác BCQP, OBCI nội tiếp.
- b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AP, AQ, K là trung điểm của EF. Khi đường thẳng d quay quanh A thì K chuyển động trên đường nào?
- c) Tìm vị trí của d để tam giác PQB có chu vi lớn nhất.

Chuyên đề 8: Một số bài toán mở đầu về hình học không gian.

Bài 1:

Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D'. Biết $AB = 4$ cm; $AC = 5$ cm và $A'C = 13$ cm. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

Bài 2:

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có diện tích mặt chéo ACC'A' bằng $25\sqrt{2}$ cm². Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

Bài 3:

Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D'. Biết $AB = 15$ cm, $AC' = 20$ cm và góc $A'AC'$ bằng 60° . Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó.

Bài 4:

Cho lăng trụ đứng tam giác đều ABCA'B'C'. Tính diện tích xung quanh và thể tích của nó biết cạnh đáy dài 6 cm và góc AA'B bằng 30° .

Bài 5:

Cho tam giác ABC đều cạnh a. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G của tam giác ABC. Trên đường thẳng d lấy một điểm S. Nối SA, SB, SC.

- a) Chứng minh rằng $SA = SB = SC$.
- b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp S.ABC, cho biết $SG = 2a$.

Bài 6:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy là a và đường cao là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp là các tam giác đều.
- b) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài 7:

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a.

- a) Tính diện tích toàn phần của hình chóp.
- b) Tính thể tích của hình chóp.

Bài 8:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao 15 cm và thể tích là 1280 cm^3 .

- a) Tính độ dài cạnh đáy.
- b) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài 9:

Một hình chóp cùt diện tích đáy nhỏ là 75 cm^2 , diện tích đáy lớn gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ và chiều cao là 6 cm. Tính thể tích của hình chóp cùt đó.

Bài 10:

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD).

- a) Tính thể tích hình chóp.
- b) Chứng minh rằng bốn mặt bên là những tam giác vuông.
- a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài 11:

Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Biết thể tích hình trụ là $128\pi \text{ cm}^3$, tính diện tích xung quanh của nó.

Bài 12:

Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh bằng $65\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

Bài 13:

Cho hình nón cùt, bán kính đáy lớn bằng 8 cm, đường cao bằng 12 cm và đường sinh bằng 13 cm.

- a) Tính bán kính đáy nhỏ.
- b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cùt đó.

Bài 14:

Một hình cầu có diện tích bề mặt là $36\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình cầu đó.

